最適化　試験問題

2003. 1. 22

（注意：　問題および解答用紙はそれぞれ全部で 2 ページである．
問 1 と問 2 の解答には別々の 解答用紙を用い，各々の
解答用紙に名前を書くこと .）

問 **1.** 次の 2 つの非線形計画問題 P_1 と P_2 を考える．

$$P_1: \quad \text{目的関数}: \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \ \rightarrow \ \text{最大}$$
$$\text{制約条件}: \ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq 1$$

$$P_2: \quad \text{目的関数}: \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \ \rightarrow \ \text{最小}$$
$$\text{制約条件}: \ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq 1$$

ただし，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ は正定値対称であり，$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ であると仮定する．

以下の問 $(\mathrm{a}) - (\mathrm{c})$ に答えよ．

(a) 問題 P_1 の最適解を求めよ．

(b) 問題 P_2 の最適解を求めよ．

(c) 行列 $\boldsymbol{A}$ は対角成分が $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ であるような対角行列であるとする．いま，ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$ の各成分を条件 $c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$ を満たす範囲で動かすことを考える（行列 $\boldsymbol{A}$ の各成分は固定する）．そのとき，問題 P_1 の目的関数の最大値と問題 P_2 の目的関数の最小値の差が最も小さくなるような $\boldsymbol{c}$ の値と，差が最も大きくなるような $\boldsymbol{c}$ の値を求めよ．

(問 2 は次ページ)

問 **2.** 0–1 ナップサック問題

$$\begin{aligned} &\text{目的関数} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \rightarrow \text{最大} \\ &\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leqq b \\ &\qquad\qquad z_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

を考える. ただし, $c_1/a_1 \geqq c_2/a_2 \geqq \cdots \geqq c_n/a_n$ かつ $0 < a_i \leqq b\ (\forall i)$ であり, さらにある整数 $s \in \{1,\ldots,n\}$ に対して $\sum_{i=1}^{s-1} a_i \leqq b < \sum_{i=1}^{s} a_i$ が成り立つと仮定する. この問題の最適値を OPT と記す.

(ア) まず, 要素 $i = 1,2,\ldots,s-1$ をナップサックに詰める (すなわち $z_1 = z_2 = \cdots = z_{s-1} = 1,\ z_s = z_{s+1} = \cdots = z_n = 0$) 欲張り法 (講義で説明したものとは若干異なる) を考え, 得られる解の目的関数値を $A_1 = \sum_{i=1}^{s-1} c_i$ とおく. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A_1/OPT \leqq \varepsilon$ となる問題例が存在する, すなわち近似度は限りなく 0 に近づくことを示せ. (ヒント: $n = 2$ の簡単な例が存在する. c_s と a_s がともに極端に大きい場合を考えればよい.)

(イ) 上の欲張り法を改良し, 上記の近似解と, 要素 s のみをナップサックに詰める (すなわち $z_s = 1,\ z_i = 0\ (i \neq s)$) 解の二通りを試して, よい方を採用するという方法を考える. この方法による解の目的関数値を A_2 とすると, $A_2 = \max\{A_1, c_s\}$ である. この方法の近似度が $1/2$ 以上であること, すなわち任意の問題例に対して $A_2/OPT \geqq 1/2$ が成り立つことを示せ. なお, $\bar{b} = b - \sum_{i=1}^{s-1} a_i$ に対して, $UB = \sum_{i=1}^{s-1} c_i + c_s\bar{b}/a_s$ は最適値の上界を与える, すなわち $OPT \leqq UB$ が成り立つ. この事実は証明に利用してよい.

(ウ) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A_2/OPT \leqq 1/2 + \varepsilon$ となるような問題例が存在することを示せ. (ヒント: $n = 3$ の簡単な例が存在する.)

以上