例. パーティで n 人が一人1つプレゼントを持ち寄り交換．だれも自分のプレゼントに当たらない交換の仕方の数 $p(n)$ を求める．
人を1から n と番号づけ．
i のプレゼントを j が受け取ることを $\varphi(i)=j$．
「だれも自分のプレゼントに当たらない」 $\iff \forall i,\ \varphi(i) \neq i$

X: $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の全ての置換 φ の集合

$C=\{\varphi \in X \mid \forall i,\ \varphi(i) \neq i\}$

$A_i=\{\varphi \in X \mid \varphi(i)=i\}$

とおく．

$$
\begin{aligned}
|C| &= |X|-|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1 \leq i_1<\cdots<i_k \leq n}|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| &= |\{\varphi \in X \mid \varphi(i_1)=i_1,\ldots,\varphi(i_k)=i_k\}| \\
&= (n-k)!
\end{aligned}
$$

である（n 個の対応の内 k 個が固定された置換の総数だから）．
よって求める数は

$$
\begin{aligned}
p(n) &= |C|=n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}{}_n\mathrm{C}_k(n-k)! \\
&= n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} \\
&= n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}.
\end{aligned}
$$

なお, でたらめにプレゼント交換したときにうまく行く確率は $p(n)/n!$.
$\lim_{n\to\infty} p(n)/n! = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0.367879\cdots$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(n)/n!$	0	0.5	0.333333	0.375	0.366667	0.368056	0.367857	0.367882