アルゴリズム及び演習 第 5 回 補足

小野孝男

2007 年 5 月 21 日

問題 3 の別解

木の各頂点に対し, 深さの小さいものから大きいものへ, また同じ深さでは左から右へと順序とつけ, この順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ と呼ぶ.

ここで, 頂点 v_i の高さを h とおくと, $2^h \cdot i \le n < 2^{h+1} \cdot i$ でなければならない (v_i を根とする部分木の最も左の葉は $v_{2^h \cdot i}$ であり, これが存在しなければならない). つまり $h = \lfloor \log(n/i) \rfloor$ である.

従って

$$
\begin{aligned}
\sum_{v \in V} h(v) &= \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \log \frac{n}{i} \right\rfloor \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \log \frac{n}{i} \\
&\le \log n + \int_1^n \log \frac{n}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= (n+1) \log n - \frac{(x \ln x - x)|_1^n}{\ln 2} \\
&= (n+1) \log n - \frac{n \ln n - n + 1}{\ln 2} = (n+1) \log n - n \log n + \frac{n}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \\
&= n \log e + \log n - \log e = O(n).
\end{aligned}
$$