アルゴリズム及び演習 第 2 回 補足

小野 孝男

2007 年 4 月 23 日

1. 問題 4 について:
   木 T における葉の数 $n_L(T)$ に関する帰納法で証明してみる. ここでも T の外部路長, 内部路長, 頂点数をそれぞれ $L_e(T), L_i(T), n(T)$ とする.
   (a) $n_L(T) = 1$ のとき: このとき T は根のみからなる. 従って $n(T) = 1$, $L_e(T) = L_i(T) = 0$ より命題は成り立つ.
   (b) $n_L(T) = k$ で命題が成り立つと仮定する. T は $n_L(T) = k + 1$ であるような木とする. ところで, この木 T には 2 **つの子がいずれも葉**であるような頂点が必ず存在する (図 1). そのような頂点を v, その 2 つの子をそれぞれ v, v' とおく. 今 T における u の深さを d とする. ここで, T から v, v' を削除して得られる新しい木 T' を考える. T' では T から 2 個の葉 v, v' がなくなっているが u が新たに葉となるため $n_L(T') = k$ である. つまり, T' に対して帰納法の仮定を適用することができて

$$L_e(T') = L_i(T') + n(T') - 1$$

   である. ここで T と T' の間の外部路長・内部路長の関係を考えると,
   - T' で葉であった頂点 u が T では葉でなくなり, その代わり v, v' が新たに葉となる: $L_e(T) = L_e(T') - d + 2(d + 1)$.
   - u は T' では葉であったが T では葉でなくなった: $L_i(T) = L_i(T') + d$

   となる. さらに, 頂点数に関して $n(T) = n(T') + 2$ となるので

$$\begin{aligned} L_e(T) &= L_e(T') - d + 2(d + 1) = L_e(T') + d + 2 \\ &= [L_i(T') + n(T') - 1] + d + 2 \\ &= [L_i(T') + d] + [n(T') + 2] - 1 = L_i(T) + n(T) - 1. \end{aligned}$$

   よって命題は成り立つ.

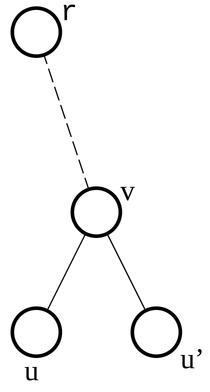

図 1　問題 4 の証明で仮定する状態

2. 問題 5 の注以降:
同じ色の辺のみからなる三角形が必ず 1 個は存在することがわかっているので, 基本的には「2 個目を作らないように辺に色を割当てていくとどうなるか」を考えると簡単である. ここでは頂点 a に接続する辺では赤の辺が青の辺より多いものと仮定し (青の方が多い場合には赤と青の役割を逆にする), 赤の辺が 4 本以上の場合と 3 本の場合に分けて考える.
なお, 以下の図において太い実線は赤の辺, 太い破線は青の辺を表し, 細い破線は次に色の割当てを考える辺とする. 細い実線はそのときには色を考えない辺である.
(a) 4 本以上のとき: 一般性を失うことなく ab, ac, ad, ae は赤であると仮定する. b, c, d, e 間の計 6 本の辺の色を考える (図 2 a). このうち 2 本以上が赤であれば, それらの端点と a からなる三角形が「赤の辺のみからなる三角形」となる (図 2 b では abc と acd). 一方, 高々 1 本が赤のときには残りの青の辺によって「青の辺のみからなる三角形」が少なくとも 2 個は作ることができる (図 2 c では bde と cde).
よって, この場合には「同色の辺のみからなる三角形」が少なくとも 2 個は存在することがわかる.

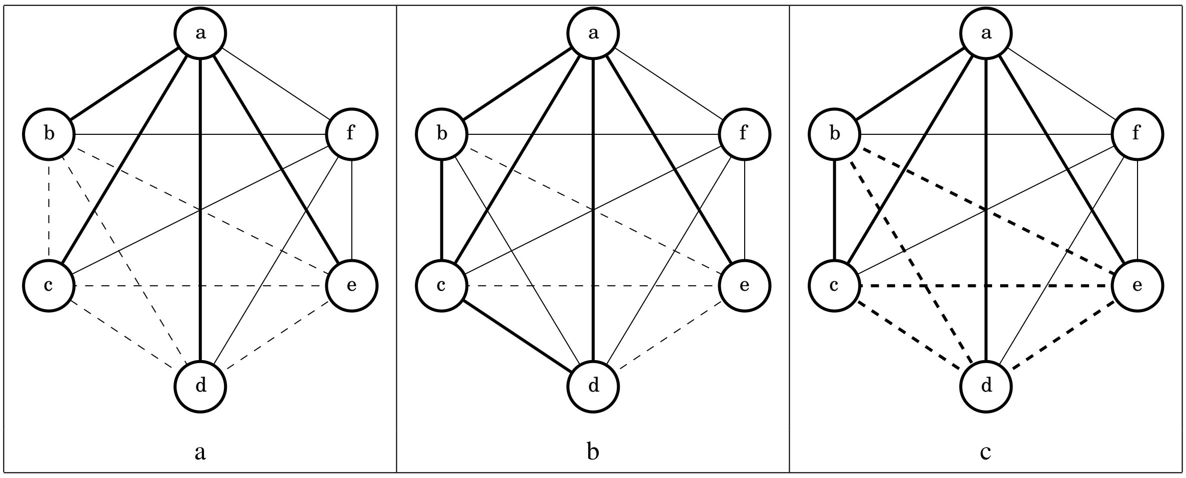

図 2　赤が 4 本以上のとき

(b) 赤の辺が 3 本のとき: 一般性を失うことなく ab, ac, ad が赤, ae, af が青であると仮定する.
i. まず, 辺 bc, cd, db を考える (図 3 a). このうち少なくとも 2 本が赤であれば「全ての辺が赤である三角形」が 2 個以上存在することになる. そこで以下では赤の辺は高々 1 本であると仮定する. 一般性を失うことなく bc 及び cd が青であると仮定してよい.
ii. 次に, 辺 ef を考える (図 3 b). この辺が青だと青の辺のみからなる三角形 aef が作られ, a, b, c, d からできるものとあわせて 2 個になる. そこで, この辺は赤であるとする.
iii. さらに, 辺 ce, cf を考える (図 3 c). この 2 辺がいずれも赤であれば三角形 cef は赤の辺のみからなり, やはり同色の辺のみからなる三角形が 2 個存在することになるので少なくとも一方は青とする. ここでは ce が青であると仮定する.
iv. 辺 be, de を考える (図 3 d) と, 少なくとも一方が青のときには ce と bc または cd により青の辺のみからなる三角形ができる. そこで, 以下ではこれらの辺は赤であると仮定する.
v. ここで辺 bf, df をみてみる (図 3 e). 少なくとも一方が赤の辺であると仮定すると, ef 及び be または de から赤の辺のみからなる三角形ができることになるので, これらは青であると仮定する.
vi. ここで再度 bd を考える (図 3 f). この辺が赤だと abd と bde が赤の辺のみからなる三角形, 青だと bcd 及び bdf が青の辺のみからなる三角形である.

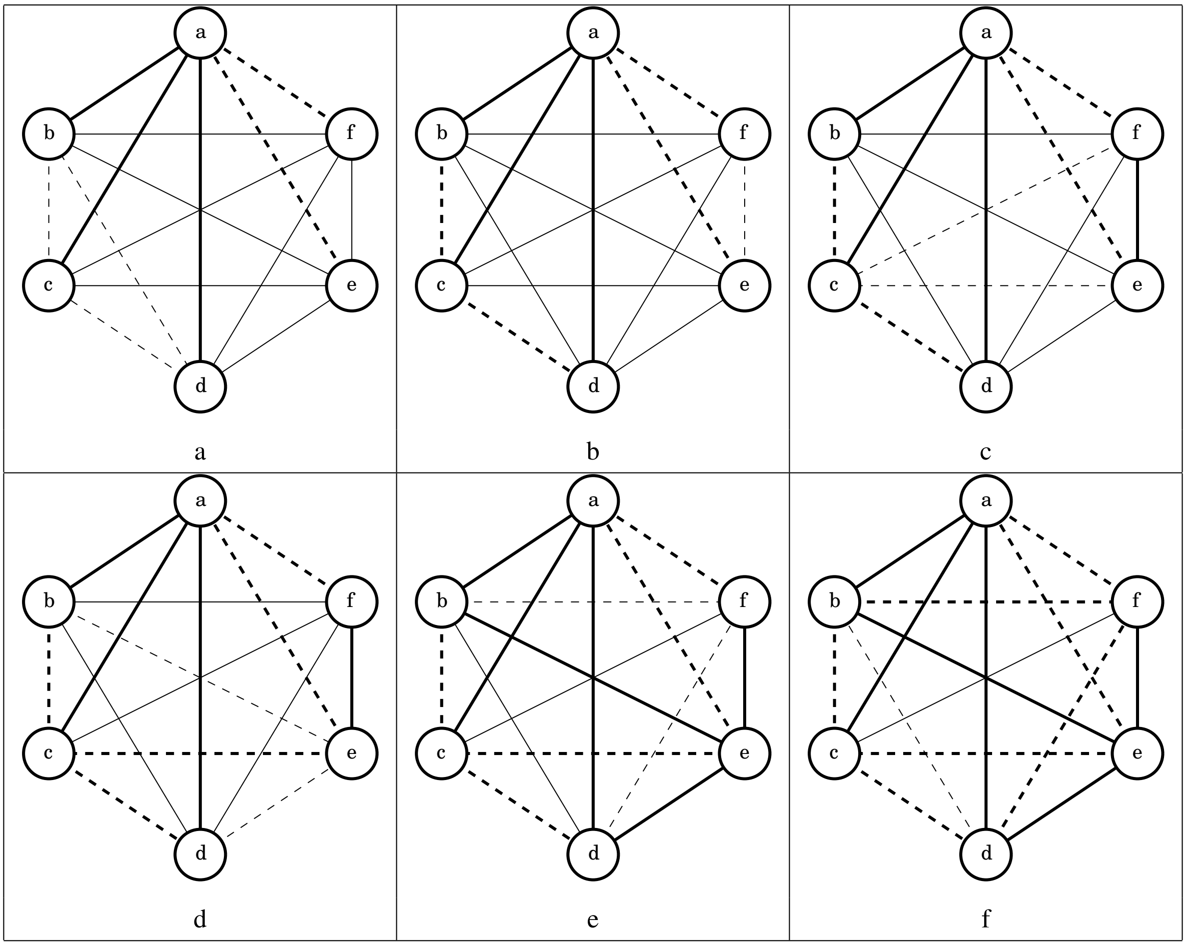

図 3　赤が 3 本のとき

つまり, この場合にも「同色の辺のみからなる三角形」は必ず 2 個以上存在する.