アルゴリズム及び演習 第 4 回演習解答

小野 孝男*

2007 年 5 月 14 日

1. 先頭にダミー要素があるので, 図 1 のようにするのが最も簡単である.

```
void remove(struct list *l, char data)
{
    while (l->next != NULL) {
        if (l->next->data == data) {
            l->next = l->next->next;
            break;
        }
        l = l->next;
    }
}
```

図 1　リストから要素を削除する関数

2. それぞれ以下の通り:
   (a) k に関する帰納法で証明する. $k = 0$ のときは $f_k = f_0 = 1$ 及び $\phi^k = \phi^0 = 1$ より $f_k = \phi^k$. また $k = 1$ のときは $f_k = f_1 = 2$ 及び $\phi_k = \phi^1 = (1+\sqrt{5})/2$ で, $5 < 9$ より $\sqrt{5} < 3$ なので $\phi^1 = (1+\sqrt{5})/2 < (1+3)/2 = 2 = f_1$.
   $k = K$ で成り立つと仮定する. ϕ が $x^2 - x - 1 = 0$ の解である, つまり $\phi^2 = \phi + 1$ に注意すると
   $$\begin{aligned}\phi^{K+1} &= \phi^{K-1} \cdot \phi^2 = \phi^{K-1}(\phi + 1) = \phi^K + \phi^{K-1} \\ &\le f_K + f_{K-1} = f_{K+1}.\end{aligned}$$
   (b) 再帰呼び出しの回数 k に関する帰納法で証明する.
   $k = 1$ のときには $m = 0$ であってはならない (このときには再帰呼び出しを行わないので). つまり $m \ge 1 = f_0$ である. $n > m$ なので $n \ge 2 = f_1$ でもある.
   $k = K$ で成り立つと仮定する. このとき $k = K + 1$ となるような入力 n, m を考える. これらに対し $n' = m, m' = n\%m$ とおくと Euclid(n', m') は K 回の再帰呼び出しを行う.

* ono@is.nagoya-u.ac.jp

つまり $n' \geq f_K$, $m' \geq f_{K-1}$ である. 従って $m = n' \geq f_K$ であることがわかる. また, n は ($n > m$ なので) ある正の整数 q を用いて $n = qm + m'$ と書くことができる. $q \geq 1$ なので $n = qm + m' \geq 1 \cdot m + m' = f_K + f_{K-1} = f_{K+1}$ となる.

3. まずユークリッドの互除法で a, b の最大公約数 d を求めると

$$\begin{aligned} 51{,}911 &= 2 \cdot 23{,}119 + 5{,}673, \\ 23{,}119 &= 4 \cdot 5{,}673 + 427, \\ 5{,}673 &= 13 \cdot 427 + 122, \\ 427 &= 3 \cdot 122 + 61, \\ 122 &= 2 \cdot 61 \end{aligned}$$

となるので $d = 61$. この計算過程を逆にたどると

$$\begin{aligned} 61 &= 427 - 3 \cdot 122 = 427 - 3(5{,}673 - 13 \cdot 427) \\ &= 40 \cdot 427 - 3 \cdot 5{,}673 = 40(23{,}119 - 4 \cdot 5{,}673) - 3 \cdot 5{,}673 \\ &= 40 \cdot 23{,}119 - 163 \cdot 5{,}673 = 40 \cdot 23{,}119 - 163(51{,}911 - 2 \cdot 23{,}119) \\ &= 366 \cdot 23{,}119 - 163 \cdot 51{,}911. \end{aligned}$$

よって $m = -163$, $n = 366$ ととればよい. 一般的には, $m = -163 + 379t$, $n = 366 - 851t$ (t は整数) と書ける.

4. 頂点数 n に関する帰納法で証明する:
$n = 2$ のときは自明である (図 2).
$n = k$ 頂点のときに成り立つと仮定して, $n = k + 1$ 頂点でも成り立つことを示す. 今 $k + 1$ 頂点からなるトーナメントが与えられているが, ここから任意に 1 頂点 (v_{k+1} とする) を除いた残りのグラフを考える. この残りのグラフは k 頂点からなるトーナメントであり, 従ってハミルトン路が存在する. このハミルトン路の順に, 頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_k$ とする. ここで, v_{k+1} とこれらの頂点との間の辺の向きによって以下のように場合分けすることができる (図 3):
   (a) v_{k+1} から v_1 への辺が存在する: この場合, $v_{k+1} \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$ というハミルトン路が存在する.
   (b) v_k から v_{k+1} への辺が存在する: この場合には $v_1 \to v_2 \to v_k \to v_{k+1}$ というハミルトン路が存在する.
   (c) その他: $v_1 \to v_{k+1}$, $v_{k+1} \to v_k$ という辺が存在している. そこで, v_i を「v_{k+1} からの辺が存在するような, ハミルトン路上で最初の頂点」とする (辺 $v_{k+1} \to v_k$ の存在により, このような頂点が存在することが保証される. また, $i \geq 2$ であることもわかる). ここで v_{i-1} について考える. これは v_i よりハミルトン路上で前にあることから, v_{k+1} からの辺は存在しない. また, $i \geq 2$ より $i - 1 \geq 1$ であり, 従ってこの頂点は確実に存在する. よって

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_{k+1} \to v_i \to \cdots \to v_k$$

   というハミルトン路が存在する.

図 2　$n = 2$ 頂点のトーナメント

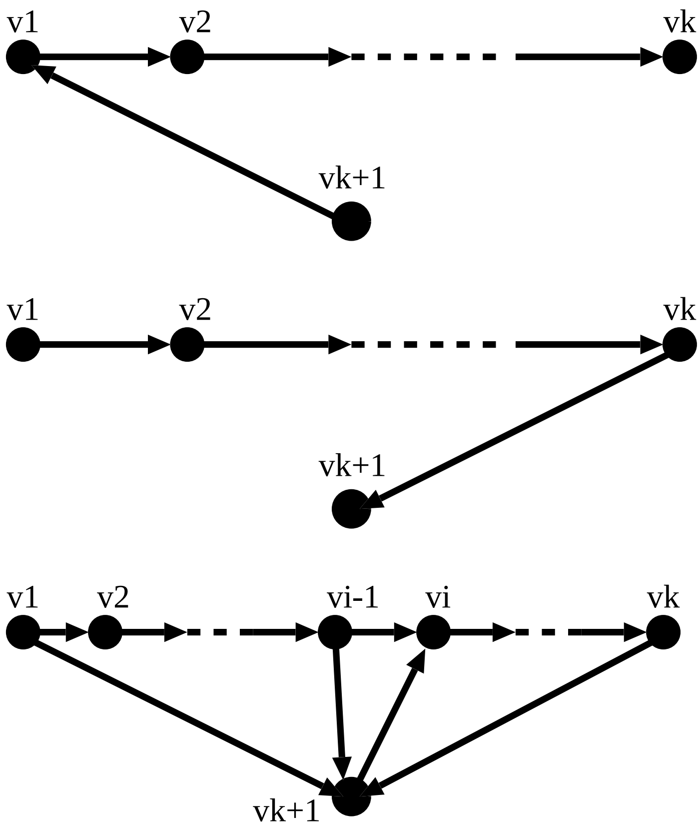

図 3　$n = k + 1$ 頂点のトーナメント

いずれの場合にも $k + 1$ 頂点からなるハミルトン路が存在することが確かめられた.