アルゴリズム及び演習 第 10 回演習解答

小野 孝男*

2007 年 6 月 25 日

1. (a) 以下の条件を満たしているかどうかをチェックすればよい:
   - 2 分探索木になっている
   - 赤の頂点が連続しない
   - 根から外点までのどのパスも, 通る黒の頂点の数は等しい

   一例を図 1 に示す.

   (b) 赤の頂点が連続することはないので, 根から外点までのどのパスにおいても, 少なくとも半分の頂点は黒である. つまり, 木の高さを h とすると, 根から外点までのパスで通る頂点のうち少なくとも $h/2$ 個は黒である. 従って, 木には少なくとも $2^{h/2}$ 個の外点が存在する. つまり, $n+1 \geq 2^{h/2}$ である. ここから $h \leq 2\log(n+1)$ なので $h = O(\log n)$ である.

2. 木の高さ h に関する帰納法で証明する. $h = 0$, つまり木 T が根だけのときは $n = 1$ かつ $L_e(T) = L_i(T) = 0$ であり, 従って $L_e(T) = L_i(T) + n - 1$ である.
   次に $h \leq H$ で命題が成り立つと仮定して $h = H+1$ のときにも成り立つことを示す. 木 T の高さを $H+1$ とする. この木の根 r の左部分木 T_L, 右部分木 T_R はいずれも高さが高々 H なので命題が成り立つ. つま

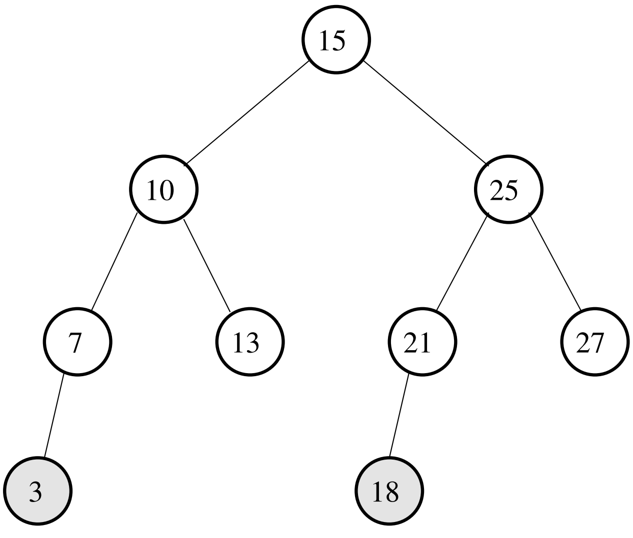

図 1　2 色木の例

* ono@is.nagoya-u.ac.jp

$c_{1,1} = 0.23$ $p_{1,1} = 0.23$			
$c_{1,2} = 0.8$ $p_{1,2} = 0.57$	$c_{2,2} = 0.39$ $p_{2,2} = 0.39$		
$c_{1,3} = 1.38$ $p_{1,3} = 0.81$	$c_{2,3} = 0.97$ $p_{2,3} = 0.63$	$c_{3,3} = 0.34$ $p_{3,3} = 0.34$	
$c_{1,4} = 1.99$ $p_{1,4} = 1.00$	$c_{2,4} = 1.44$ $p_{2,4} = 0.82$	$c_{3,4} = 0.76$ $p_{3,4} = 0.53$	$c_{4,4} = 0.23$ $p_{4,4} = 0.23$

表 1　最適 2 分探索木を作るためのコストの表

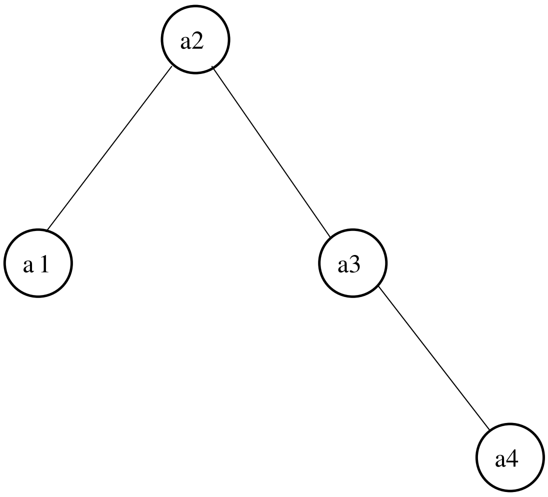

図 2　最適 2 分探索木

り, 木 T の頂点数を $n(T)$ で表すことにすると $L_e(T_L) = L_i(T_L)+n(T_L)-1$ かつ $L_e(T_R) = L_i(T_R)+n(T_R)-1$ である.

さて, T_L の根にさらに親頂点を追加すると T_L の全ての頂点で深さが 1 ずつ増える. しかし, 葉でない全ての頂点が 2 個ずつ子を持つと仮定しているため, 外部頂点は内部頂点より 1 個だけ多い. つまり, 外部路長と内部路長の差は 1 だけ大きくなる. T_R についても同様であり, 従って T における外部路長と内部路長の差は

$$\begin{aligned} L_e(T) - L_i(T) &= (L_e(T_L) - L_i(T_L) + 1) + (L_e(T_R) - L_i(T_R) + 1) \\ &= n(T_L) + n(T_R) \end{aligned}$$

である. ところで, T の頂点は T_L の頂点, T_R の頂点及び T の根 r である. つまり $n(T) = n(T_L)+n(T_R)+1$ である. 従って

$$L_e(T) - L_i(T) = n(T_L) + n(T_R) = n(T) - 1$$

となるので, $h = H + 1$ のときも成り立つ.

3. がんばって動的計画法の表を作る. $S_{i,j} = \{a_i, \dots, a_j\}$ に対する最適 2 分探索木 $T_{i,j}$ のコスト $c_{i,j}$ と生起確率 $p_{i,j}$ を表で書くと表 1 のようになる. このコストは $c_{1,4} = p_{1,4} + c_{1,1} + c_{3,4}$, $c_{3,4} = p_{3,4} + c_{4,4}$ と計算されているので, 最適な 2 分探索木は図のようになる.